RESUMEN TEORICO

Teorema: Sea *g* una función derivable y supóngase que F es una anti derivada de *f*. entonces si *u=g(x)*.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

ALGUNAS INTEGRALES TRIGONOMETRICAS.

Tipo 1: $\int sen^n(x)dx$, $\int \cos^n(x)dx$

Primero considere el caso donde *n* es un entero positivo. Después factorice el factor $\mathrm{sen}(x)$ o $\cos(x)$, utilice la identidad $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Si n es impar separar en un término par y otro impar luego aplicar propiedades para facilitar la integral.

Si n es par utilizar las identidades del ángulo medio.

Tipo 2: $\int sen^m(x)\cos^n(x)\,dx$

Si m o n es un entero impar positivo y el otro exponente es cualquier número, factorizamos sen(x) o cos(x) y utilizamos la identidad $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Si ambos m y n son enteros pares positivos, utilizar las identidades para el ángulo medio, a fin de reducir el grado del integrando.

Tipo 3: $\int sen(mx)\cos(nx)\,dx$, $\int sen(mx)sen(nx)dx$, $\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$

1.- $sen(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(sen((m+n)x) + sen((m-n)x)\right)$

2.- $sen(mx)sen(nx) = -\frac{1}{2}(\cos((m+n)x) - \cos((m-n)\,x))$

3.- $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x))$

SUSTITUCIONES PARA RACIONALIZAR.

Integrandos que incluyen $\sqrt[n]{ax+b}$

Sustitución: $u^n = ax + b$

Integrandos que incluyen: $\sqrt[n]{a^2-x^2}, \sqrt[n]{a^2+x^2}, \sqrt[n]{x^2-a^2}$

1.- $\sqrt[n]{a^2-x^2}$ $\quad$ $Sust:\ x = asen(t)$ $\quad$ $Rest:\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

2.- $\sqrt[n]{a^2+x^2}$ $\quad$ $Sust:\ x = a.tan(t)$ $\quad$ $Rest:\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

3.- $\sqrt[n]{x^2-a^2}$ $\quad$ $Sust:\ x = asec(t)$ $\quad$ $Rest: 0 \leq t \leq \pi, t \neq \frac{\pi}{2}$

COMPLETANDO CUADRADOS.

Cuando aparece una expresión cuadrática del tipo $x^2 + Bx + C$ bajo un radial, completar el cuadrado la prepara para una sustitución trigonométrica.

INTEGRACION POR PARTE.

Indefinida. $\quad$ $\int udv = uv - \int vdu$

INTEGRACION REPETIDAS POR PARTE.

En ciertos ejercicios será necesario aplicar la integración por parte más de una vez con el fin de poder obtener una implicación adecuada para así determinar la integración requerida. Por lo general se aplica integración repetida por partes cuando hay presencia de funciones trigonométricas, exponenciales.

INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES.

METODO DE FRACCIONES SIMPLES.

Para descomponer una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ en fracciones parciales, procedemos:

1.- Si f(x) es impropia, esto es, si p(x) es de un grado al menos igual de q(x). divida p(x) entre q(x), para obtener.

$$f(x) = un\ polinomio\ h(x) + \frac{N(x)}{D(x)}$$

2.- Factorice D(x) en un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

3.- Por cada factor de la forma $(ax+b)^k$, se espera que la descomposición tenga términos

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{C}{(ax+b)^k}$$

4.- Por cada factor de la forma $(ax^2+bx+c)^m$, se espera que la descomposición tenga los términos.

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^m}$$

5.- Iguale N(x)/D(x) a la suma de todos los términos determinados en los pasos 3 y 4. El número de constantes por determinar debe ser igual al grado del denominador, D(x).

6.- Multiplique ambos miembros de la ecuación encontrada en el paso 5 por D(x) y despeje las constantes desconocidas. Esto puede hacer por dos métodos: i.- Iguale coeficientes de términos del mismo grado. ii.- asigne valores convenientes a la variable x.

OTRAS FORMAS INDETERMINADAS.

Las formas indeterminadas: 0.∞ y ∞-∞.

En el primer caso se transforma una de las funciones (la mas adecuada para derivar) como la inversa, es decir, tenemos $f(x).g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ con f(x) = ∞ entonces tenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$ por L'Hopital se determina el limite requerido.

De manera análoga se tiene que si f(x) = 0 entonces la determinación es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ por L'Hopital se determina el limite.

En el segundo caso, se efectúa la resta de fracciones para asi obtener ya sea $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$, se aplica la regla de L'Hopital y se obtiene el limite.

Las formas indeterminadas: 0^0, ∞^0 , 1^∞.

En estos casos se toma logaritmo para bajar la potencia, luego se obtiene las indeterminaciones de la regla de L'Hopital, recordando la inversa del logaritmo natural, se regresa la operación para obtener un valor de base e.

OJO: LAS FORMAS $\infty.\infty$, 0^∞, ∞^∞ NO SON INDETERMINACIONES.

INTEGRALES IMPROPIAS.

Def: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$ y $\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$. Si los límites existen y tienen valores finitos, entonces decimos que las correspondientes integrales impropias ***convergen*** y tienen esos valores. De otra forma, se dice que la integral ***diverge.***

Def: Si $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ y $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ convergen, entonces se dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge y tiene valor.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

En caso contrario, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ o establezca que diverge.

Def: Sea f continua en el intervalo semiabierto $[ab)$ y suponga que $\lim_{x\to-b}|f(x)| = \infty$. Entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to b-} \int_{a}^{t} f(x)dx$$

Con tal que este límite exista y sea finito, en cuyo caso decimos que la integral converge. De otro forma, decimos que la integral diverge.

Def: Sea f continua en $[a,b]$execpto en un numero c, en donde $a < c < b$, y supóngase que $\lim_{x\to c}|f(x)| = \infty$. Entonces definimos

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

Siempre que ambas integrales converjan a la derecha. En caso contrario, decimos que $\int_{a}^{b} f(x)dx$ diverge.